TEMA 6. Estimación puntual.

En muchos casos no será posible determinar el valor de un parámetro poblacional desconocido, analizando todos los valores poblacionales, pues el proceso a seguir puede ser destructivo, o bien puede costar mucho tiempo, o mucho dinero, el analizar cada unidad poblacional. En estos casos, la única salida es hacer uso de la *inferencia estadística*, basándonos en la información contenida en un muestreo aleatorio simple.

Así, si suponemos una población definida por una variable aleatoria *X*, con función de densidad *f(x,2)*, siendo *2* un parámetro poblacional desconocido, el objeto de la teoría de la estimación consiste en tratar de determinar el parámetro poblacional desconocido *2*, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño *n*.

6.1 Al finalizar el tema el alumno debe conocer........

- ✓ Importancia de la estimación puntual.
- ✓ Conceptos fundamentales de la inferencia estadística como: Población, muestra, parámetro poblacional, estadístico muestral, estimación.
- ✓ Las características fundamentales de los dos métodos que vamos a utilizar en la inferencia estadística para obtener el valor del parámetro poblacional: estimación y contrastación de hipótesis.
- ✓ Objetivo y características fundamentales de la estimación puntual.
- ✓ Propiedades de los estimadores puntuales.
- ✓ La utilización de los métodos de obtención de estimadores.
- ✓ El método de los momentos.
- ✓ El método de la máxima verosimilitud.

6.2 Importancia de la estimación puntual.

En el tema anterior se estudió que muchas decisiones se toman a partir de resultados muestrales. Por ejemplo:

- Para estimar el gasto medio mensual de las familias de la Comunidad de Madrid con un nivel de renta fijado se extrae una muestra aleatoria.
- Un Ayuntamiento selecciona a una muestra de vecinos para comprobar el

grado medio de aceptación de un determinado programa de bienestar.

- Una caja de ahorros española, para estimar la proporción de empleados que se involucrarían a la hora de desarrollar sistemas tecnológicos en sus oficinas, selecciona una muestra aleatoria.

Cualquier inferencia que se haga sobre la población tendrá que basarse en estadísticos muestrales, la elección de estos estadísticos dependerá del parámetro a estudiar de la población. El verdadero parámetro será desconocido, y muestro objetivo será estimar su valor basándonos en la información contenida en una muestra aleatoria seleccionada de esa población. Así, se puede proceder mediante estas dos alternativas:

1. Estimación. Los tipos fundamentales de estimación son:
   - Estimación puntual
   - Estimación por intervalo
2. Verificación de hipótesis.

Mediante ambos, el objetivo final es llegar a una conclusión o inferencia sobre el parámetro poblacional que es desconocido.
De lo expuesto hasta ahora, se deduce que en la práctica no es necesario calcular todas las posibles nuestras de tamaño n de una población, sino que se utiliza directamente lo que la Teoría Estadística ha demostrado. Se extrae una muestra aleatoria simple de la población y se observa en sus elementos el valor de la variable de interés.

Vemos por tanto que existe diferencia entre estimador y estimación. Utilizamos el término estimador cuando nos referimos a una variable aleatoria que depende de la información de la muestra y cuyas realizaciones proporcionan una aproximación al valor desconocido del parámetro poblacional. Los valores que toma la función estimador, para las diferentes realizaciones o muestras concretas, serán las estimaciones. Se llama estimación a un valor específico del estimador.

6.3 Las características fundamentales de los dos métodos que vamos a utilizar en la inferencia estadística para obtener el valor del parámetro poblacional: estimación y contrastación de hipótesis

Estimación puntual.

En una estimación puntual se utiliza un solo número o valor para determinar una estimación del parámetro poblacional desconocido. En la estimación puntual se asume que el estadístico es un buen estimador del parámetro desconocido. Obviamente cualquier estadístico no sirve, es necesario que satisfaga ciertas propiedades:

Estimación por intervalos de confianza.

En un intervalo de confianza se indica un rango o recorrido, dentro del cual se pondría encontrar el parámetro poblacional desconocido, y el nivel de confianza de que el intervalo contenga este parámetro poblacional.

Contrastación de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una conjetura relativa a alguna característica de la población, que puede ser cierta o no. Las hipótesis estadísticas se pueden contrastar con la información extraída de las muestras, y tanto si se aceptan como si se rechazan se puede cometer un error.

La hipótesis formulada con intención de rechazarla se llama hipótesis nula y se representa por H_0. Rechazar H_0 implica aceptar una hipótesis alternativa (H_1).

En este caso los pasos a seguir son los siguientes, plantear las hipótesis, escoger un estadístico concreto, conocer la distribución de este estadístico y decidir, con los datos de la muestra, si estamos caracterizando a la población.

6.4 Objetivo y características fundamentales de la estimación puntual.

En una estimación puntual se utiliza un solo número o valor para determinar una estimación del parámetro poblacional desconocido. En la estimación puntual se asume que el estadístico es un buen estimador del parámetro. Obviamente cualquier estadístico no sirve, es necesario que satisfaga ciertas propiedades, que se analizarán en el próximo apartado.

	Parámetros poblacionales	Estadísticos muestrales-Estimación puntual
Media	$\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
Varianza	$\delta^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$	$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
Proporción	$p = \dfrac{\text{número de éxitos en } N \text{ pruebas}}{N}$	$\hat{p}_x = \dfrac{\text{número de éxitos en } n \text{ pruebas}}{n}$

6.5 Propiedades de los estimadores puntuales.

1. Estimador insesgado o centrado y de varianza mínima. Cota de Cramer-Rao.

Se dice que un estimador es insesgado o centrado si la media de la distribución muestral del estadístico muestral coincide con el parámetro a estimar. Es decir, si repetimos el proceso de muestreo muchas vedes en promedio el valor que se obtiene de un estimador insesgado será igual al parámetro poblacional. Un estimador es insesgado cuando no existe sesgo entre la esperanza del estimador y el parámetro poblacional, o sea, la esperanza del estimador es el propio parámetro.

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$
$$Sesgo\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta = 0$$

Para obtener un estimador insesgado de varianza mínima, hay que determinar las varianzas de todos los estimadores insesgados de θ y seleccionar el que posea la varianza más pequeña. La cota de Cramer Rao permite obtener una cota inferior de la varianza.

$$C.C.R = \frac{1}{n \cdot E\left[\dfrac{\partial Lnf(x,\theta)}{\partial \theta}\right]^2}$$

Siendo *f(x,θ)* la función de verosimilitud.

La media, la varianza y las proporciones muestrales son estimadores insesgados de los correspondientes parámetros poblacionales.

Parámetro Poblacional	Estimador insesgado
μ	$\overline{X}$
δ^2	S^2
p	$\hat{p}_X$

No debemos olvidar que la varianza muestral la hemos definido $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$, para que podamos obtener un estimador insesgado.

-Definición de Error Cuadrático Medio.

Para realizar comparaciones de eficiencia de un estimador respecto a un parámetro poblacional lo hacemos a través del Error Cuadrático Medio (E.C.M):

$$E.C.M\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta} - \theta\right]^2$$

Si desarrollamos el cuadrado obtenemos:

$$E.C.M\left(\hat{\theta}\right) = Var\left(\hat{\theta}\right) + \left(sesgo\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

Por lo que vemos que está compuesto de dos cantidades no negativas. El E.C.M. involucra las dos propiedades más importantes de un estimador, la varianza debe ser los más pequeña posible y la distribución del muestreo debe concentrarse alrededor del parámetro

2. Estimador eficiente.

Un estimador es eficiente si se cumple que:

- Es insesgado $E\left[\hat{\theta}\right] = \theta$
- Posee varianza mínima. Para calcular si el valor adquirido por la varianza es mínimo, usamos la cota de Cramer-Rao.

Si se tienen dos estimadores insesgados, que siguen las mismas distribuciones, para un mismo tamaño muestral n , se dice que uno es más eficiente que el otro cuando su varianza es menor.

$$Var\,(estimador\;\;1) < Var\,(estimador\;\;2)$$

El estimador 1 será más eficiente que el estimador 2. Al ser estimadores insesgados ambas distribuciones muestrales tienen la misma media, luego será más homogénea la distribución que posee menor varianza.

3. Estimador consistente.

La consistencia de un estimador está relacionada con el comportamiento del estimador cuando el tamaño de la muestra aumenta. Es decir, a medida que el tamaño de la muestra aumenta la información que nos proporciona sobre la población será mayor.

Se dice que un estimador es consistente cuando al aumentar el tamaño de la muestra, el valor medio de la distribución muestral del estadístico muestral tiende al parámetro a estimar.

$$\lim_{n \to N} E\,(estadístico) = parámetro\ a\ estimar$$

Así cuando el tamaño de la muestra aumenta la información es más completa y la varianza del estimador suele ser menor, por tanto la distribución muestral de ese estimador tenderá a encontrarse más concentrada alrededor del parámetro que pretendemos estimar.

4. Estimador suficiente.

Este concepto de suficiencia fue introducido por Fisher en 1922, y puede decirse que:
Diremos que un estadístico suficiente para un parámetro poblacional desconocido cuando recoge toda la información que la muestra contiene sobre el parámetro. Dicho de otra forma: Una vez que sabemos el valor que ha tomado el estadístico, la muestra $(x_1, \cdots, x_n)$ ya no puede proporcionarnos mas información sobre dicho parámetro. Esto

equivale a decir que, si el estadístico es suficiente, la distribución de probabilidad de la muestra condicionada a que conocemos el valor del estadístico , ha de ser independiente del parámetro.

6.6 Estimador invariante.

Un estimador es invariante si se verifica que el estimador de una función del parámetro es igual a la función del estimador del parámetro.

$$\hat{f}(\theta) = f\left(\hat{\theta}\right)$$

Por ejemplo si la varianza muestral es estimador de la varianza poblacional, si el método de estimación es invariante, la desviación típica muestral será estimador de la desviación típica poblacional.

Existen estimadores invariantes a cambios de origen, cambios de escala, o cambios de origen y escala.

Estimadores	**C. origen**	**C. escala**
$\overline{x}$	No invariante	No invariante
s^2	Invariante	No invariante
s	Invariante	No invariante
ρ Coeficiente correlación	Invariante	Invariante

6.7 Estimador robusto.

Un estimador es robusto cuando pequeños cambios en las hipótesis de partida del procedimiento de estimación considerado, no producen variaciones significativas en los resultados obtenidos.

Para estimaciones de la media poblacional, no conociendo la desviación típica muestral, utilizamos el estadística T- Student con $(n-1)$ grados de libertad, y con un tamaño de muestra relativamente grande:

$$\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

Ante pequeñas variaciones en la distribución $N(\sigma,\mu)$, no se producen cambios sustanciales en los procedimientos basados en este estadístico.

Si realizamos pequeñas variaciones en la distribución, sí se producen cambios sustanciales para procedimientos que se realicen sobre la varianza poblacional, basados en el estadístico χ^2_{n-1}

6.8 Métodos de obtención de estimadores.

Los principales métodos de estimación de parámetros de un modelo probabilístico o de coeficientes de un modelos matemático son los siguientes

- Método de los momentos
- Método de máxima verosimilitud
- Mínimos cuadrados

Para la estimación de parámetros de distribuciones de probabilidad, los métodos empleados son los dos primeros, mientras que el segundo se usa principalmente en los estudios de regresión.

6.8.1Método de los momentos.

Es el método más sencillo y antiguo. Se suele utilizar para obtener una primera aproximación de los estimadores. Se igualan tantos momentos muestrales, como parámetros se tengan que estimar.

Propiedades de los estimadores obtenidos por el método de los momentos:

- Si los parámetros desconocidos son momentos poblacionales, entonces los estimadores obtenidos serán insesgados y asintóticamente normales
- Bajo condiciones bastantes generales, los estimadores obtenidos serán consistentes.

6.8.2.Método de la máxima verosimilitud.

En esencia el método consiste en seleccionar como estimador del parámetro, de un modelo probabilístico, a aquél valor que tiene la propiedad de maximizar el valor de la probabilidad de la muestra observada. Es decir, encontrar el valor del parámetro que maximiza la función de verosimilitud.

Propiedades de los estimadores obtenidos por el método de máxima verosimilitud:

- Los estimadores de máxima verosimilitud son consistentes.
- En general no son insesgados, pero si no son insesgados son asintóticamente insesgados (el estimador $\hat{\theta}$ converge al parámetro θ, y en el límite coincide con su valor medio, que es el parámetro θ).
- Todo estimador de máxima verosimilitud no es eficiente, pero sí son asintóticamente eficientes.
- Son asintóticamente normales.
- Son suficientes.